CC BY NC ND

DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

marielmates

DISCUTIR UN SISTEMA DE ECUACIONES es decir cuantas soluciones tiene (0, 1 o infinitas)

RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES es describir las soluciones (cuando las haya)

$$\begin{cases} 2x-3y+az=2 \\ -2x \quad +4z=-3 \\ \quad 2ay+3z=1 \end{cases}$$

MATRIZ DE COEFICIENTES $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & a \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2a & 3 \end{pmatrix}$

MATRIZ DE INCÓGNITAS $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, MATRIZ DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

TEOREMA DE ROUCHÈ-FROBENIUS (TRF)

OBSERVA $Rg(A^*) \geq Rg(A)$

Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, siendo A la matriz de coeficientes de las incógnitas y A* la matriz ampliada, formada por (A|B), siendo B la matriz columna formada por los términos independientes del sistema, entonces se cumple que si :

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & a & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2a & 3 & 1 \end{array}\right)$

MATRIZ AMPLIADA

- $Rg(A) = Rg(A^*)=n=n^{\underline{o}}$ incógnitas → SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO → S.C.D. (1 SOLUCIÓN)
- $Rg(A) = Rg(A^*)<n=n^{\underline{o}}$ incógnitas → SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO → S.C.I (INFINITAS SOLUCIONES)
- $Rg(A) \neq Rg(A^*)$ → SISTEMA INCOMPATIBLE → S.I. (0 SOLUCIONES)

Un sistema es **HOMOGÉNEO** si todos sus términos independientes son 0, por lo que $rg(A)=rg(A^*)$ siempre.

- Si $rg(A) = n^{\underline{o}}$ incógitas es SCD (1 SOLUCIÓN). La única solución sería la solución trivial, es decir, x=0 y=0 ...
- Si $rg(A) < n^{\underline{o}}$ incógnitas es SCI (infinitas soluciones). Una de ellas siempre es la solucion trivial.

REGLA DE CRAMER

EN LOS SCD $|A|\neq 0$

Podemos resolver sistemas compatibles determinados (SCD) usando esta regla:

$$x=\frac{|B \quad C2 \quad C3|}{|A|} \qquad y=\frac{|C1 \quad B \quad C3|}{|A|} \qquad z=\frac{|C1 \quad C2 \quad B|}{|A|}$$

Sustituimos en la matriz A la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita x, y, z... por la matriz columna B de términos independientes.

DISCUSION Y RESOLUCION DE SISTEMAS CON PARAMETRO k

EL SISTEMA TIENE EL MISMO Nº DE ECUACIONES Y DE INCÓGNITAS n

1º Estudiar el rango de A. Para ello calcular $|A|=0$.

2º Resolver la ecuación anterior. Las soluciones son los valores a, b, c,...

3º Si $k \neq a, b, c$ entonces $|A|\neq 0$, por lo que el $rg(A)=n$. El $rg(A^*)$ también es n, ya que $rg(A) \leq rg(A^*) \leq n$. Por el TRF → SCD (1 solución). Resolver por Cramer (no sustituir k por ningún valor en particular).

Si $k = a$ sustituir ese valor en la matriz A*, estudiar rango de A y A* (GAUSS-matriz escalonada) y aplicar TRF. Resolver cuando se pueda (utiliza la matriz de A* escalonada)

EL SISTEMA TIENE Nº DISTINTO DE ECUACIONES QUE DE INCÓGNITAS

1º Estudiar el $rg(A^*)$ segun los valores de k.

2º Según los valores hallados en el apartado anterior, hallar el rg(A).

3º Discutir con los valores de los rangos usando el TRF.

4º Resolver cuando sea posible (Si es SCD y con parámetro, se puede usar la regla de Cramer).

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL CASO SCD CON MATRICES

Podemos representar el sistema de forma matricial de la siguiente forma $A\cdot X=B$ siendo A la matriz de coeficientes de las incógnitas, X la matriz columna formada por las incógnitas y la matriz columna B formada por los términos independientes.

$$A\cdot X=B$$
$$A^{-1}\cdot A\cdot X= A^{-1}\cdot B$$
$$X = A^{-1}\cdot B$$

EN LOS SCD: $|A|\neq 0$ Y POR LO TANTO EXISTE A^{-1}

CC BY NC ND

1

$$\begin{cases} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{cases}$$

MATRIZ DE COEFICIENTES $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix}$ MATRIZ DE INCÓGNITAS $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

MATRIZ DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES $B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

DISCUTIR EL SISTEMA

Hallar el rango de A $|A|=a^2-4=0,\ a=2,\ a=-2$

Si $a\neq 2, -2$, $rg(A)=3$ por lo que $rg(A^*)=3$ ya que $rg(A^*)\leq 3$ por ser matriz 3x4 y por otra parte $rg(A^*)\geq rg(A)$. SCD-1 SOLUCIÓN

Si $a=2$ $|A|=0$, por lo que $rg(A)\neq 3$. Sustituimos en A*.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aquí podemos observar que $rg(A)=2$ y $rg(A^*)=2$. $Rg(A)=rg(A^*)<$ nº incógnitas, SCI- infinitas soluciones

Si $a=-2$ $|A|=0$, por lo que $rg(A)\neq 3$. Sustituimos en A*.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Aquí podemos observar que $rg(A)=2$ y $rg(A^*)=3$. $Rg(A)\neq rg(A^*)$, SI- no tiene solución

RESOLVER EL SISTEMA

$a\neq 2, -2$, SCD por Cramer $x=\dfrac{\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{a^2-4a+4}{a^2-4}=\dfrac{a-2}{a+2}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{a^2-2a}{a^2-4}=\dfrac{a}{a+2}$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{4a-8}{a^2-4}=\dfrac{4}{a+2}$

$a=2$ SCI, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Nº PARÁMETROS NECESARIOS=1

$$\begin{cases} x-4y+3z=1 \\ 2y-z=0 \rightarrow y=\dfrac{\lambda}{2} \rightarrow x=1-\lambda \end{cases}$$

$z=\lambda$

Nº PARÁMETROS NECESARIOS= Nº INCOGNITAS — Nº ECUACIONES (una vez esta escalonado el sistema)

EN LOS SISTEMAS ESCALONADOS, RESOLVEMOS DE ABAJO HACIA ARRIBA

2

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+my=7 \\ x-y=4 \end{cases}$$

MATRIZ DE COEFICIENTES $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, MATRIZ DE INCÓGNITAS $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, MATRIZ DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

DISCUTIR EL SISTEMA

$A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & m & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$ $|A^*|=3m+12=0,\ m=-4$

Si $m\neq -4$ $rg(A^*)=3$ y $rg(A)\leq 2$ por lo que será: SI- no tiene solución

Si $m=-4$ $|A^*|=0$ por lo que $rg(A^*)\neq 3$.

$$A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A)=2=rg(A^*)=2$. $Rg(A)=rg(A^*)=n$, SCD-1 sol

RESOLVER EL SISTEMA

$m=-4$ Resolvemos de abajo hacia arriba

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\begin{cases} x-y=4 \\ -3y=3 \end{cases}\rightarrow y=-1$$

$\rightarrow x-(-1)=4,\ x=3$